

ЛЕКЦИЯ 8

Глава 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

8.1. Общие положения

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим.

Для построения этой кривой линии на чертеже находят проекции ее отдельных точек, соединяемых с помощью лекала.

Среди точек линии пересечения имеются точки, которые занимают особое расположение на кривой или выделяются своим местоположением относительно плоскостей проекций. Такие точки называют *опорными* или *характерными*. К ним относятся высшие и низшие, ближние и дальние, точки, расположенные на крайних образующих (точки видимости) и др. Остальные точки называются *промежуточными* или *случайными*.

Для нахождения точек линии пересечения применяются вспомогательные секущие плоскости (проецирующие или плоскости уровня). Вспомогательные плоскости выбираются так, чтобы в пересечении с кривой поверхностью получались простейшие линии – прямые и окружности.

На рис. 8.1 цилиндр вращения пересекается плоскостью общего положения α , заданной следами $h_{0\alpha}'$ и $f_{0\alpha}''$.

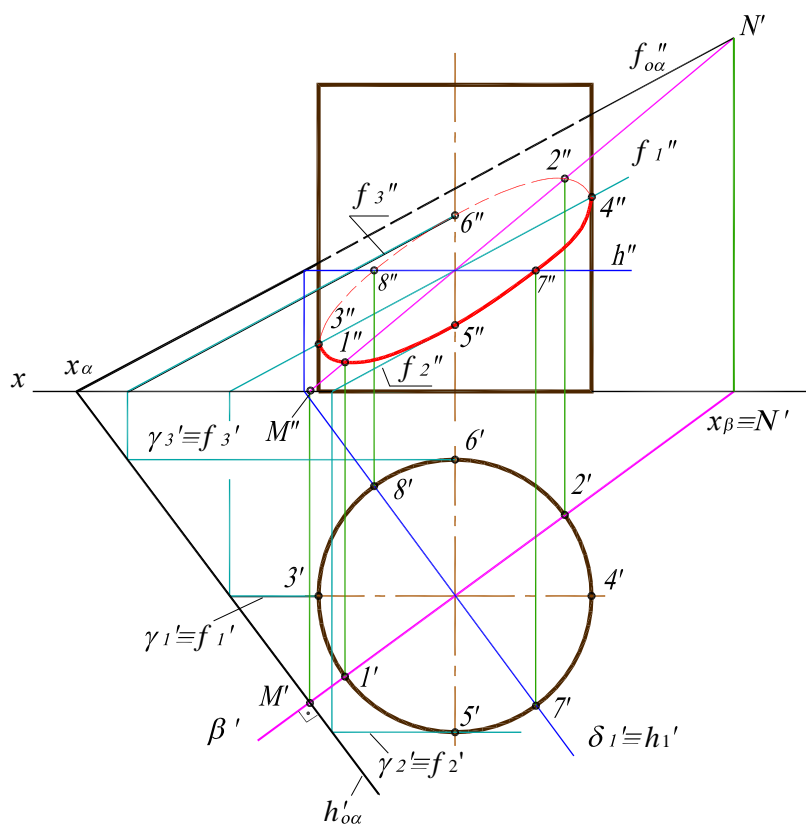


Рис. 8.1

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра (окружностью). Для построения фронтальных проекций точек кривой пересечения использованы вспомогательные плоскости частного положения.

Низшая 1 и высшая 2 точки определены при помощи горизонтально-проецирующей плоскости β , перпендикулярной секущей плоскости α . Она пересекает

плоскость α по линии MN (линии наибольшего ската), а поверхность цилиндра – по образующим.

Точки видимости 3 и 4, ближняя 5 и дальняя 6 построены при помощи фронтальных плоскостей $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, пересекающих заданную плоскость α по фронталям f_1, f_2, f_3 , а поверхность цилиндра – по образующим.

Для построения точек 7 и 8 использована горизонтально-проецирующая плоскость δ , которая пересекается секущей плоскостью α по горизонтали h (как плоскости с параллельными горизонтальными следами), а с поверхностью цилиндра – по образующим.

Последовательно соединив фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения цилиндра плоскостью – эллипс (большая ось эллипса – отрезок 1–2, малая – отрезок 7–8).

Для нахождения промежуточных точек можно воспользоваться либо фронтальными, либо горизонтальными плоскостями уровня. В последнем случае плоскости будут пересекать секущую плоскость по горизонталям, а поверхность цилиндра – по окружностям. Определив горизонтальные проекции точек, принадлежащие линии сечения, можно найти и фронтальные. Построение промежуточных точек на рис. 8.1 не показано.

Задача на построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью значительно упрощается, если заданные секущие плоскости являются плоскостями частного положения. В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией секущей плоскости, а построение недостающих сводится к построению ряда проекций точек на поверхности. А если секущая плоскость является плоскостью общего положения, то можно преобразовать чертеж так, чтобы секущая плоскость стала в новом положении проецирующей (например, использовать способ перемены плоскостей проекций).

В дальнейшем пересечение поверхностей будет рассматриваться только плоскостями частного положения (проецирующими или плоскостями уровня).

8.2. Пересечение цилиндра плоскостью. Построение развертки

При пересечении цилиндра вращения плоскостью возможны случаи:

- 1) секущая плоскость параллельна оси – в сечении цилиндрической поверхности получаются две прямые (образующие) (рис. 8.2, а);
- 2) секущая плоскость перпендикулярна оси – в сечении получается окружность, равная окружностям оснований (рис. 8.2, б);
- 3) секущая плоскость наклонна к оси – в сечении получается эллипс, малая ось которого всегда равна диаметру цилиндра, а большая зависит от угла φ (рис. 8.2, в).

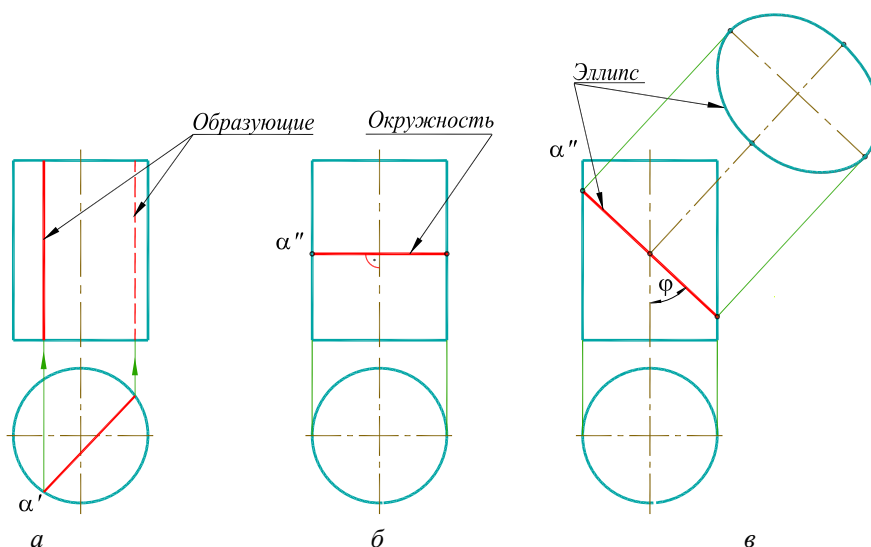


Рис. 8.2

На рис. 8.3 показано построение проекций цилиндра вращения, усеченного плоскостями частного положения α , β , γ .

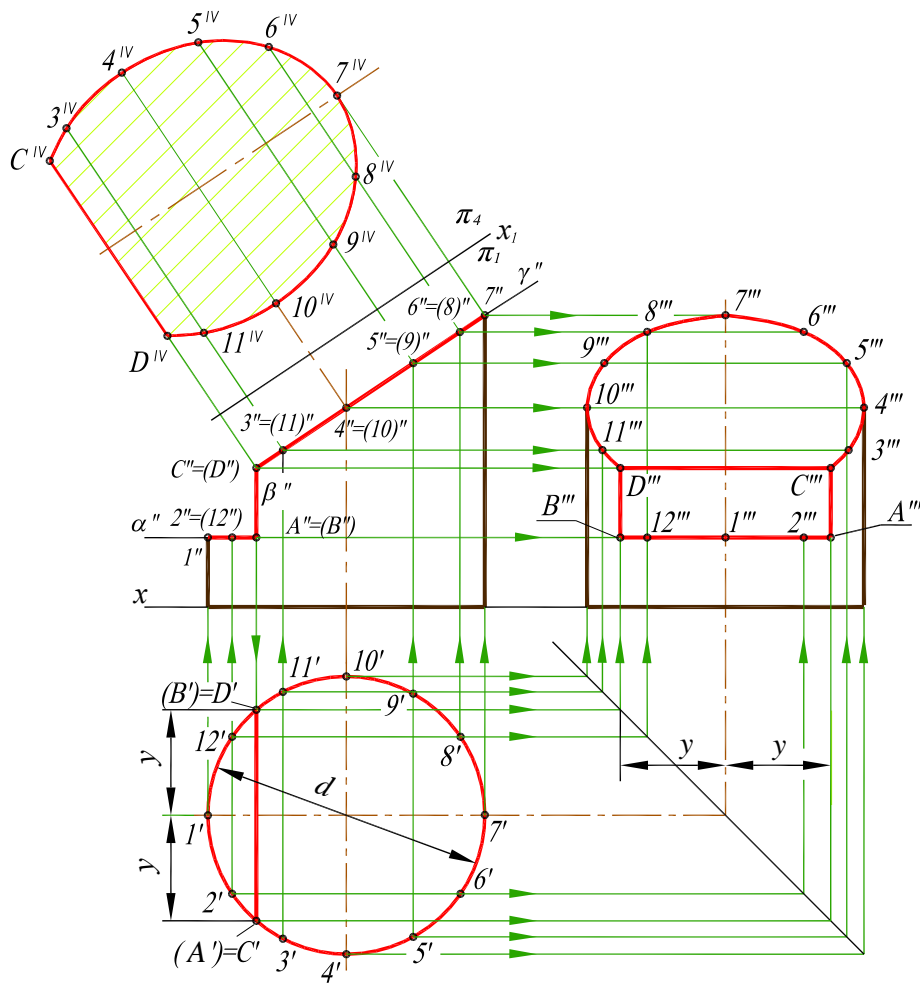


Рис. 8.3

Горизонтальная плоскость α (α'') пересекает поверхность цилиндра по части окружности, профильная плоскость β (β'') – по прямым AB и CD (образующим цилиндра), фронтально-проецирующая плоскость γ (γ'') – по части эллипса. Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей (α'' , β'' , γ''), а горизонтальная – с окружностью основания цилиндра.

Построение профильной проекции сводится к построению профильных проекций точек по двум заданным (направление построений линий связи указано стрелками). Вместо ломаных линий связи при построении профильных проекций точек можно использовать координаты y , которые откладываются на горизонтальных линиях связи по разные стороны оси цилиндра (см. построение точек A , B , C , D).

Обычно для построения точек линий сечения пользуются образующими, равноотстоящими друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция цилиндра (окружность) разделена на 12 частей (точки 1, 2, ..., 12). Этой равномерной «разметкой» удобно пользоваться для создания не только проекций сечений, но и развертки.

Действительный вид фигуры сечения плоскостью γ построен способом перемены плоскостей проекций. Новая ось проекций x_1 проведена параллельно следу-проекции γ'' . Выполнив соответствующие построения на плоскости π_4 , получим натуральную величину сечения цилиндра плоскостью γ .

На рис. 8.4 приведено построение полной развертки усеченного цилиндра.

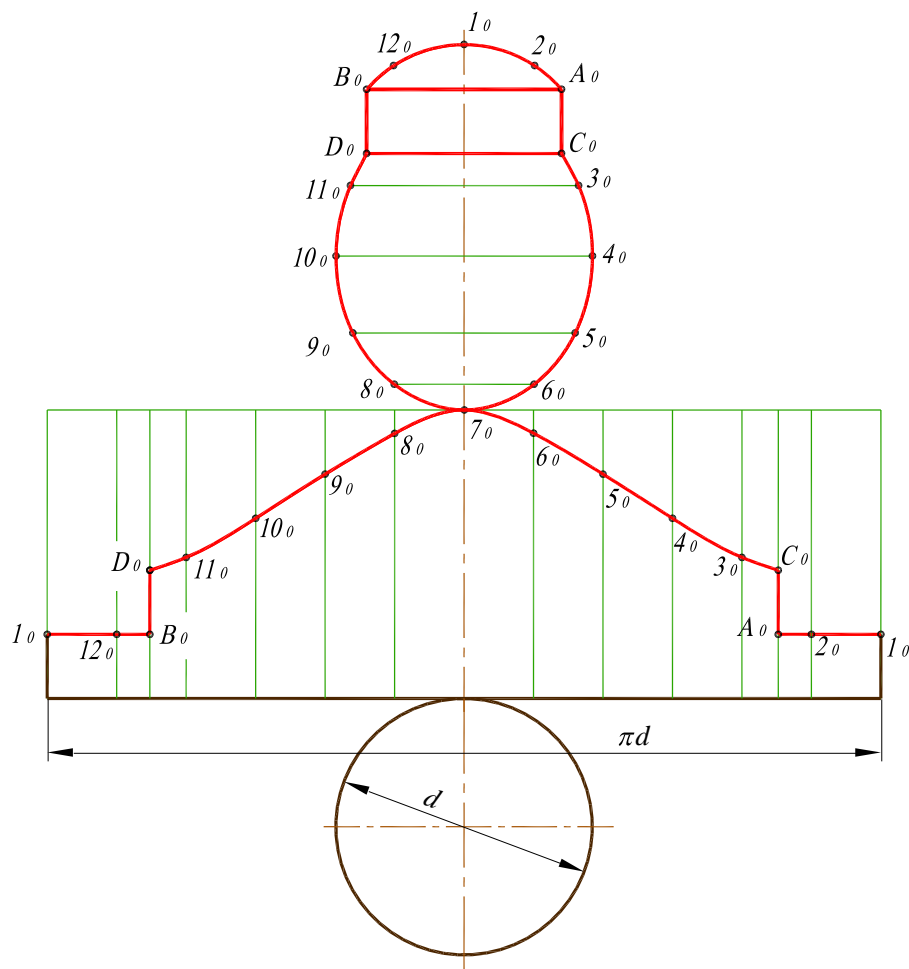


Рис. 8.4

Для построения развертки боковой поверхности на горизонтальной прямой откладывают длину окружности основания πd и делят ее на 12 равных частей (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности можно откладывать длину соответствующей хорды). Из точек деления проводят перпендикуляры к отрезку πd и на них откладывают длины образующих от основания цилиндра до секущих плоскостей α , β , γ . Для построения точек A , B , C , D на развертке использовано расположение этих точек на горизонтальной проекции цилиндра (от точек деления откладывают длины дуг $2A$ и $12B$). Точки 1 , A , C и 1 , B , D соединены прямыми линиями. Точки C , 3 , ..., 11 , D соединяют плавной линией. К прямой линии πd (развертка нижнего основания цилиндра) присоединяют окружность основания, а к верхней части боковой развертки – натуральные фигуры сечения плоскостями (часть эллипса, прямоугольник, сегмент окружности).

8.3. Пересечение конуса плоскостью. Построение развертки

При пересечении конуса вращения получают различные виды кривых второго порядка (конические сечения). Рассмотрим возможные случаи пересечения конуса фронтально-проецирующими плоскостями (угол между следом-проекцией и осью конуса – φ , половина угла конуса при вершине – σ).

1. Секущая плоскость α (α'') пересекает все образующие конуса (не параллельна ни одной из образующих конуса) – в сечении получается эллипс ($\varphi > \sigma$) (рис. 8.5).
2. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получается окружность (рис. 8.6).

3. Секущая плоскость α (α'') параллельна одной образующей конуса – в сечении получается парабола ($\varphi = \sigma$) (рис.8.7).

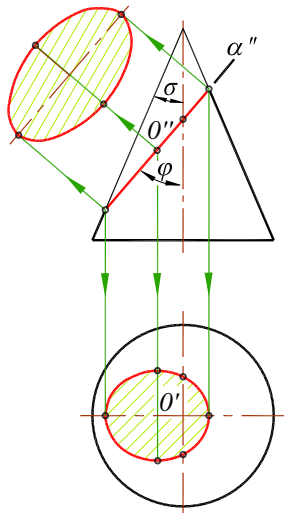


Рис. 8.5

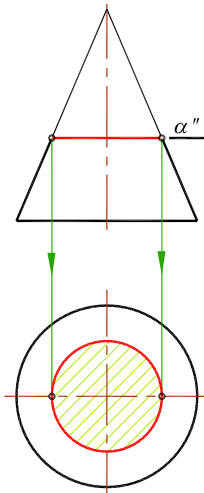


Рис. 8.6

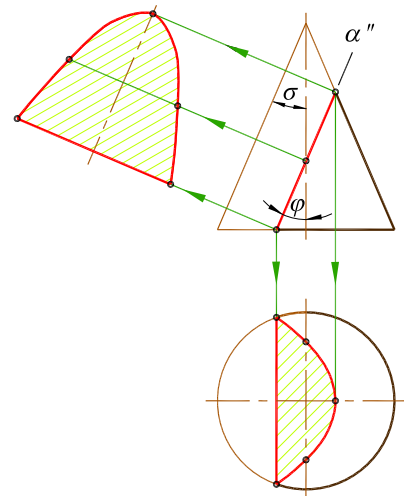


Рис. 8.7

4. Секущая плоскость α_1 (α_1'') параллельна двум образующим конуса – в сечении получается гипербола ($\varphi < \sigma$) (рис. 8.8). Профильная плоскость α_2 (α_2'') образует с осью конуса угол равный 0, что не противоречит вышеуказанному неравенству.
5. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получается пара пересекающихся в вершине прямых (образующих) (рис. 8.9).

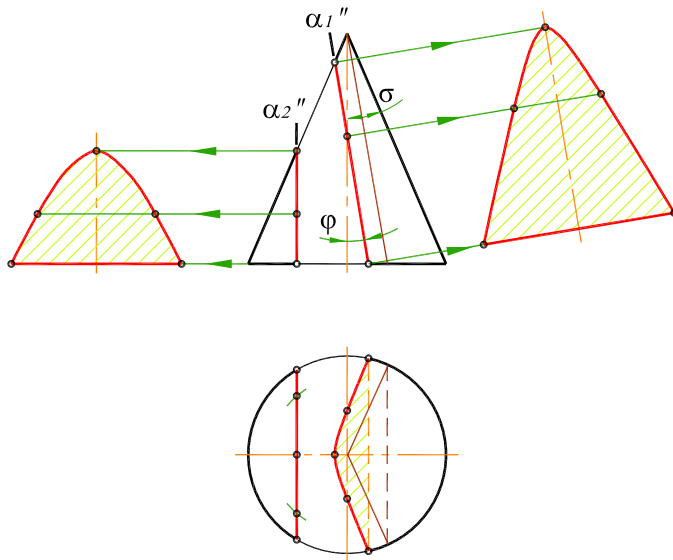


Рис. 8.8

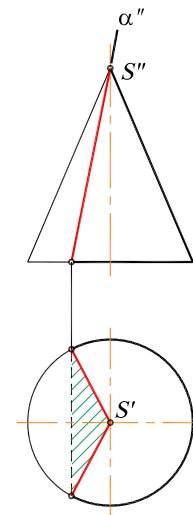


Рис. 8.9

Если конус вращения пересекается плоскостью общего положения, то о линии пересечения можно судить, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую. Такое преобразование целесообразно выполнить переменой плоскостей проекций. На рис. 8.10 показано построение проекций усеченной части конуса вращения плоскостями частного положения α и β .

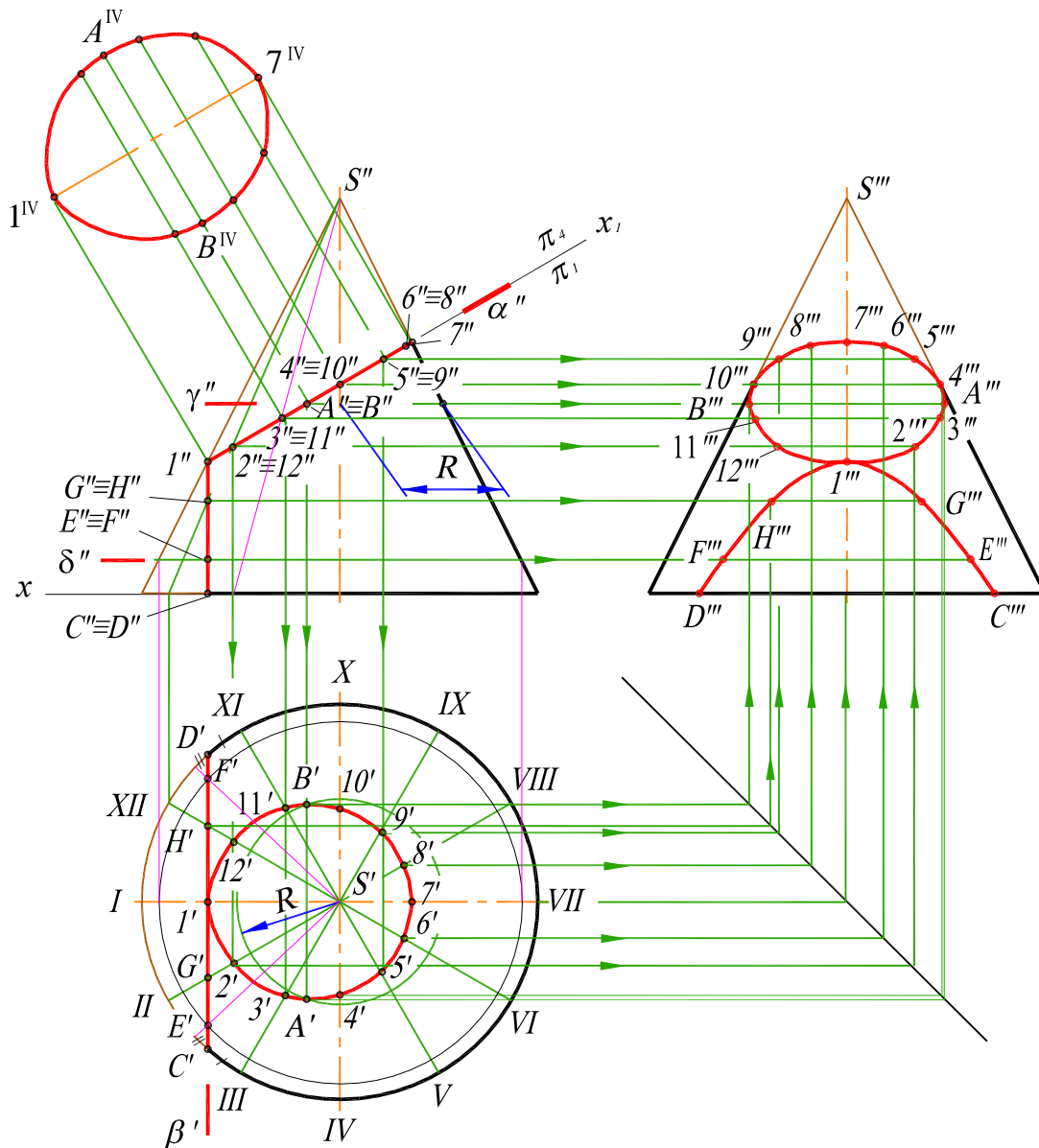


Рис. 8.10

Фронтально-проецирующая плоскость α (α'') пересекает поверхность конуса по эллипсу (см. рис. 8.5), профильная плоскость β (β'') – по гиперболе (см. рис. 8.8).

Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей (α'' , β'').

Горизонтальная проекция сечения конуса плоскостью α – эллипс, а горизонтальная проекция сечения плоскостью β совпадает со следом-проекцией β' .

Для построения точек линий сечения использованы образующие, равностоящие друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция основания конуса (окружность) разделена на 12 равных частей (точки I, II, ..., XII). Это позволяет использовать равноотстоящие образующие для построения развертки конуса.

Фронтальные проекции образующих пересекают след-проекцию α'' в точках $1''$, $2''$, ..., $12''$. Эти точки по линиям связи находятся на горизонтальных проекциях образующих, причем точки 4 и 10 определяются на профильной проекции (на очерковых образующих), а затем на горизонтальной. Малая ось эллипса AB определена при помощи горизонтальной плоскости γ (γ''), которая проведена через середину отрезка $1'' - 7''$ (фронтальную проекцию линии сечения плоскостью α).

Вспомогательная плоскость γ (γ'') пересекает плоскость α по фронтально-проецирующей прямой, а конус – по окружности радиуса R . В пересечении прямой и дуги радиуса R определим горизонтальные проекции A' и B' .

Построения профильных проекций точек эллипса ($1''$, $2''$, ..., $12''$) сводится к построению проекций точек по двум заданным (направления линий связи указаны стрелками).

Для построения точек, принадлежащих гиперболе использованы точки G и H , находящихся на образующих II и XII, а также точки E и F , принадлежащие вспомогательной горизонтальной плоскости δ (δ'').

На рис. 8.11 приведено построение полной развертки усеченного конуса, показанного на рис. 8.10.

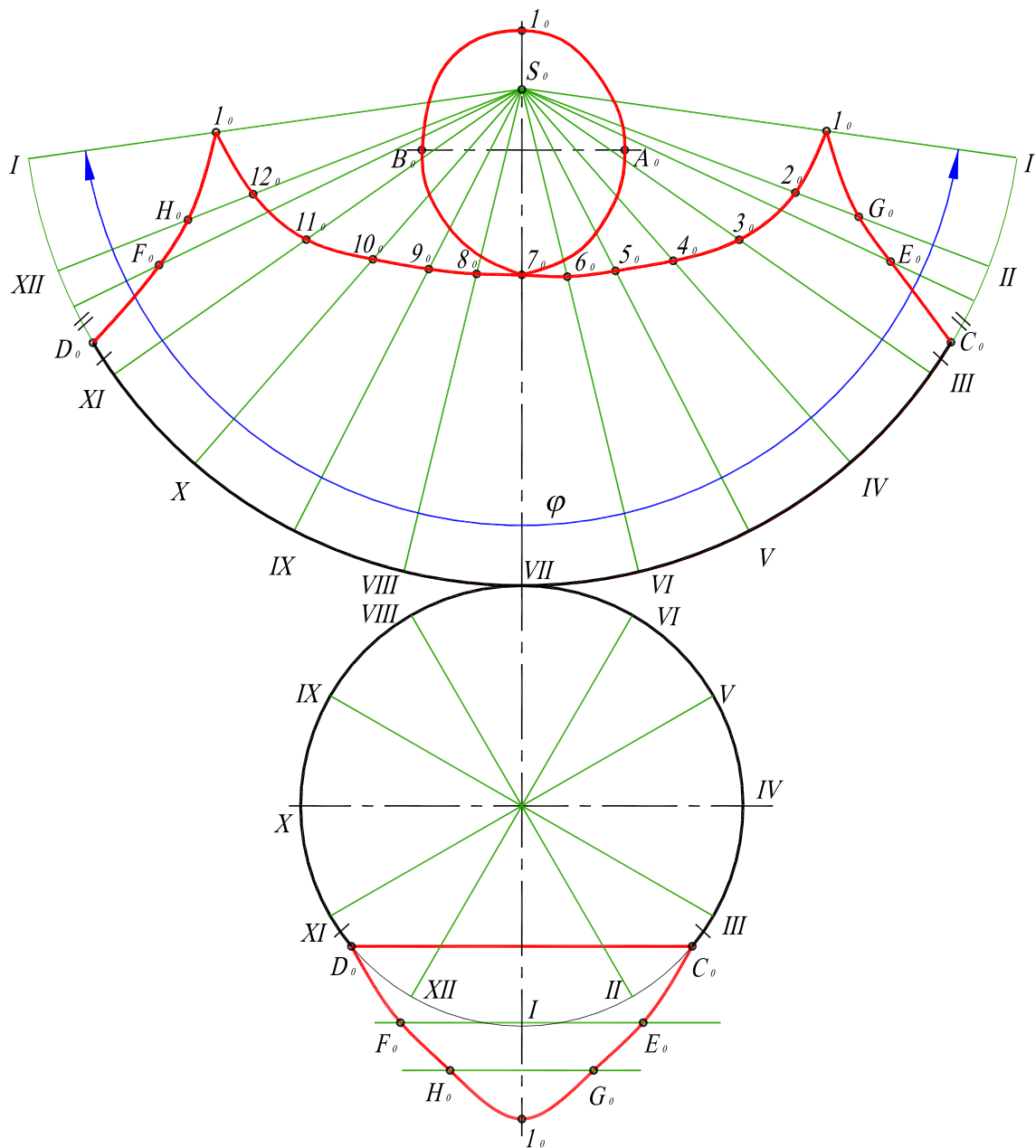


Рис. 8.11

Полная развертка состоит из развертки боковой поверхности, части основания конуса и натуральных величин сечений.

Построение развертки боковой поверхности начинают с проведения из точки S_0 дуги окружности радиусом, равным длине образующей конуса. Длина дуги определяется центральным углом φ :

$$\varphi = 180 d/l;$$

где d – диаметр окружности основания конуса; l – длина образующей.

Дугу делят на 12 частей, и полученные точки соединяют с точкой S (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности основания конуса можно откладывать длину хорды).

От вершины S_0 на образующих откладывают действительные длины отрезков образующих от вершины конуса до секущих плоскостей. Действительные длины данных отрезков находят способом вращения вокруг оси конуса. Для этого достаточно из фронтальных проекций точек фигур сечений провести горизонтальную прямую до пересечения с контурной образующей конуса, являющейся действительной ее длиной.

Для построения точек C_0 и D_0 , лежащих на основании конуса, следует отложить от точек III и XI соответствующие дуги (эти дуги на рис. 8.10 и 8.11 отмечены одной черточкой).

Для построения точек E_0 и F_0 на развертке находят положения образующих, на которых есть эти точки, откладывая от точек II и XII соответствующие дуги (эти дуги отмечены двумя черточками). Положение точек E_0 и F_0 на образующих находим, используя действительные длины отрезков SE и SF .

Для получения полной развертки пристраивают к развертке боковой поверхности часть основания конуса и натуральные величины сечений.

Натуральная величина эллипса построена по его осям (использован способ перемены плоскостей проекций), натуральная величина сечения профильной плоскостью β находится на профильной проекции (рис. 8.10).

8.4. Пересечение сферы и тора плоскостью

При пересечении сферы плоскостью всегда получается окружность, которая в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к плоскостям проекций проецируется в виде прямой, в виде эллипса или в виде окружности.

На рис. 8.12 показано построение проекций сферы, усеченной плоскостями частного положения α , β , γ . Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей (α'' , β'' , γ'').

Горизонтальная проекция сечения сферы плоскостью α – окружность радиуса R_1 , а профильная – прямая.

Профильная проекция сечения плоскостью β – окружность радиуса R_2 , а горизонтальная – прямая.

Плоскость γ пересекает сферу по окружности, которая на плоскости π_1 и π_3 проецируется в виде эллипса. Две вершины этого эллипса (точки A и B) являются нижней и верхней точками сечения и лежат на фронтальном меридиане. Точки 1 и 2, лежащие на экваторе и профильном меридиане, отделяют видимые части горизонтальной и профильной проекций от невидимой (точки обозначены только на одной симметричной части сечения). Вершина эллипса D (конец большой оси) определена при помощи горизонтальной плоскости δ_1 (δ_1''). Плоскость δ_1 пересекает заданную плоскость γ по фронтально-проецирующей прямой, а сферу – по окружности радиуса R_3 , проецирующейся на плоскость π_1 в натуральную величину. Профильная проекция D''' точки D строится по линиям связи. Аналогичным способом находят промежуточные точки 3, используя вспомогательную плоскость δ_2 (δ_2'').

Видимость горизонтальной и профильной проекций линий сечений определяется в зависимости от расположения их относительно экватора и профильного меридиана сферы.

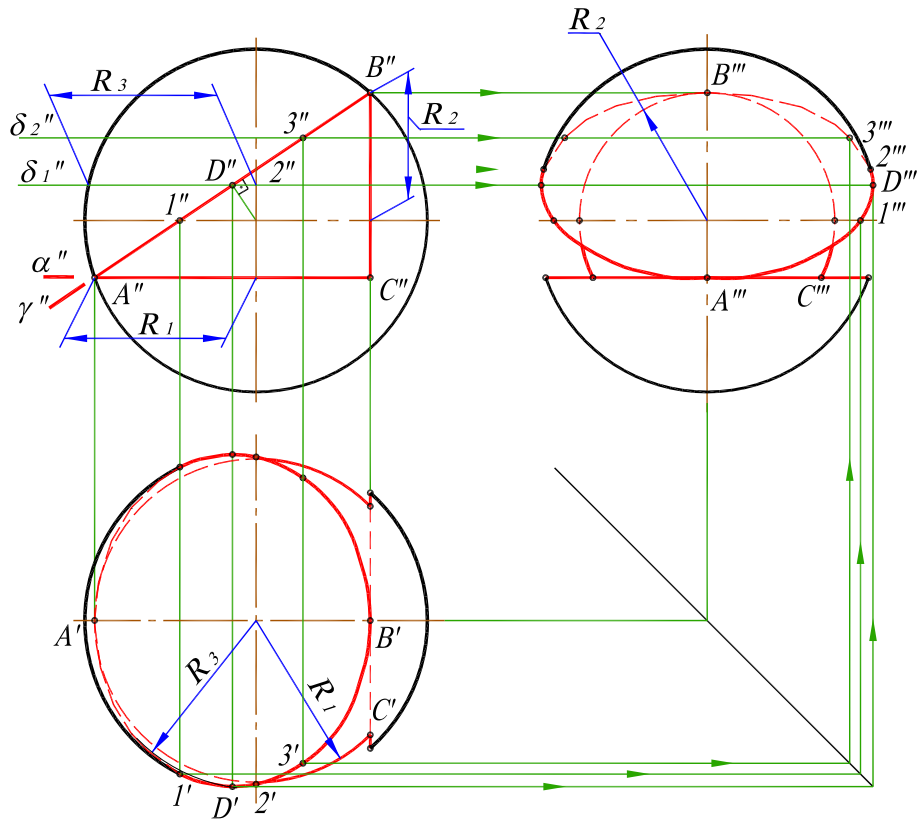


Рис. 8.12

При пересечении тора плоскостью в общем случае получается кривая 4-го порядка, в частных случаях она может распадаться на две кривые 2-го порядка.

На рис. 8.13 показано построение проекций усеченной части открытого тора фронтально-проецирующей плоскостью α (α'').

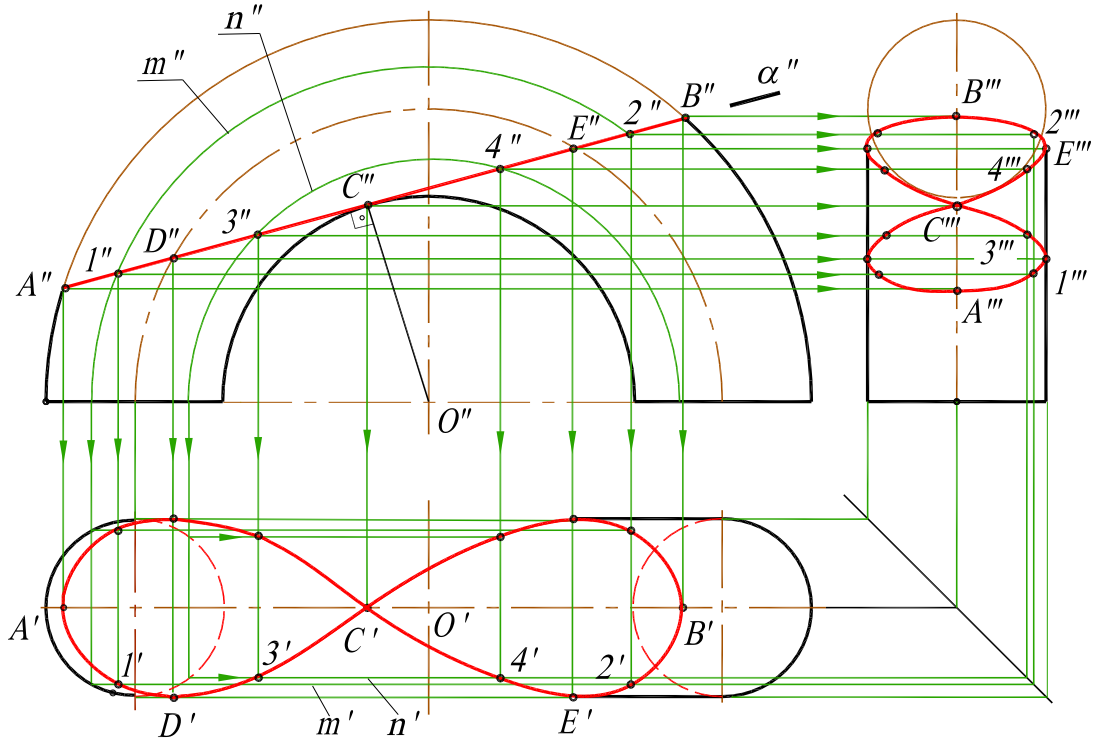


Рис. 8.13

Фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией секущей плоскости α'' . Для построения кривой пересечения определены точки A, B, C, D, E и промежуточные 1, 2, 3, 4. Точки A и B лежат на экваторе (наибольшей параллели) тора, точка C – на горле (наименьшей параллели). Точки D и E лежат на крайних параллелях (точки обозначены только на одной симметричной части сечения).

Промежуточные точки 1 и 2 расположены на параллели m , точки 3, 4 – на параллели n . Построение горизонтальных проекций показано стрелками.

Профильные проекции точек кривой пересечения построены при помощи линий связи.

8.5. Построение условной развертки сферы

Так как сферическая поверхность принадлежит к числу неразвертывающихся, то возможна лишь ее приближенная (условная) развертка. Способ построения состоит в том, что сферу разбивают с помощью меридианов на узкие равные между собой доли (клинья). Каждую такую долю заменяют описанной цилиндрической поверхностью, которая касается сферы по среднему меридиану доли. Этот средний меридиан будет нормальным сечением цилиндрической поверхности. Границы цилиндрической поверхности – плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую долю.

На рис. 8.14 показано построение условной развертки сферы.

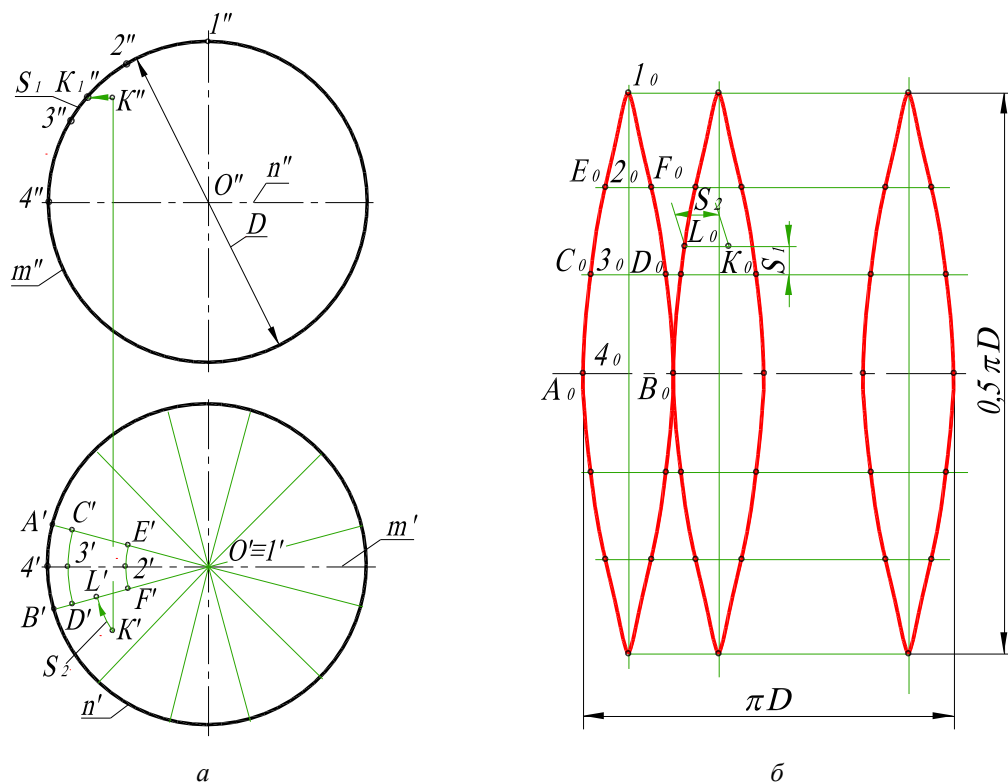


Рис. 8.14

Горизонтальную проекцию n' экватора n разбиваем на 12 равных частей и через полученные точки проводим горизонтальные проекции меридианов (рис. 8.14, а).

Рассмотрим построение приближенной развертки 1/12 части (доли) сферы, средним меридианом которой является меридиан m ($m' m''$).

Заменим часть сферы цилиндрической поверхностью, описанной около нее. Образующие этой поверхности будут фронтально-проецирующими прямыми. Для построения развертки элемента цилиндрической поверхности половину фронтального меридиана разбиваем на 6 равных частей (отмечены точками 1, 2, 3, 4 только половина симметричной части). На горизонтальной прямой (рис. 8.14, б) откладываем отрезок A_0B_0 , равный 1/12 окружности диаметра D . Через середину A_0B_0 проводим перпендикуляр и

Решение. Для построения использован способ перемены плоскостей проекций. Преобразуем чертеж так, чтобы секущая плоскость заняла положение проецирующей и сведем задачу к построению ряда точек на поверхности конуса.

Расположим дополнительную плоскость проекций π_4 перпендикулярно горизонтали AB секущей плоскости, а ось x_1 – перпендикулярно проекции $A'B'$. Горизонталь AB преобразуется в проецирующую прямую, а секущая плоскость $(AB \cap BC)$ – в плоскость, перпендикулярную плоскости π_4 . След – проекция секущей плоскости – пересекает проекцию конуса на плоскость π_4 в точках 1^{IV} и 2^{IV} , которые являются концами большой оси эллипса. В точке O , делящей отрезок 1–2 пополам, находится проекция центра эллипса. По линиям связи на горизонтальной проекции конуса найдены проекции $0', 1', 2'$. Для нахождения проекций $3'$ и $4'$ (концов малой оси эллипса) использована плоскость α (α^{IV}), проведенная перпендикулярно к оси конуса. В пересечении окружности радиуса R , проведенной из точки S' , с линией связи, проведенной из проекции O^{IV} , находятся проекции $3'$ и $4'$. Для определения положения точек 5 и 6, в которых эллипс на фронтальной проекции разделяется на «видимую» и «невидимую» части, построены проекции $S^{IV}D^{IV}, S^{IV}E^{IV}$ образующих SD и SE , найдены точки 5^{IV} и 6^{IV} , по ним проекции $5'$ и $6'$. Образующие SF и SG использованы для нахождения точек 7 и 8, расположенных на ближней и дальней образующих конуса. Фронтальные проекции точек $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'', 7'', 8'', 0''$ находятся исходя из того, что расстояния проекций на плоскость π_4 от оси x_1 равны расстоянию проекций на плоскость π_2 от оси x . Профильную проекцию линии пересечения конуса плоскостью получают с помощью линий связи.

Натуральная величина фигуры сечения эллипса строится по его большой оси ($1_02_0 = 1^{IV}2^{IV}$) и малой оси ($3_04_0 = 3'4'$).

Задача 2. Построить линию пересечения тела вращения фронтальной плоскостью α (рис. 8.16).

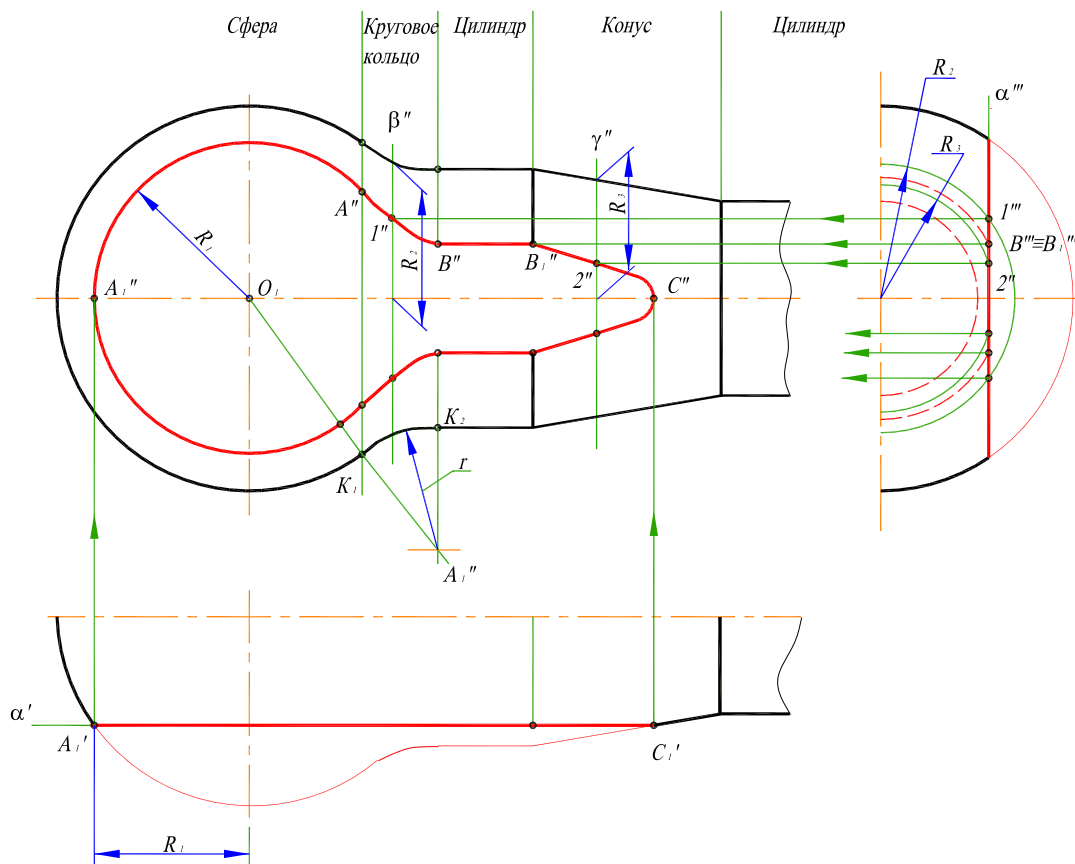


Рис. 8.16

В практике линии, получающиеся при плоском срезе заготовки детали, поверхность которой ограничена соосными поверхностями вращения, называют линиями среза. На рис. 8.16 изображено тело вращения, ограниченное сферической поверхностью, поверхностью кругового кольца, конической и двумя цилиндрическими поверхностями, а также двумя фронтальными плоскостями α (на чертеже даны лишь половины горизонтальной и профильной проекций детали).

Вначале устанавливаются участки поверхностей вращения, ограничивающих рассматриваемое тело. Цилиндр и конус разделяют окружности (их проекции вертикальные линии), а для определения граничных окружностей, разделяющих круговое кольцо со сферой и цилиндром, выполняется сопряжение очерковых линий сферы и цилиндра. Точки сопряжения K_1 и K_2 найдены на линии центров O_1O_2 и на перпендикуляре к образующей цилиндра. Через точки сопряжения и граничные окружности проведены профильные плоскости – границы участков тела вращения (участки надписаны над фронтальной проекцией).

Линия среза сферы – параллель радиуса R_1 , построенная по горизонтальной проекции точки A_1 , линия среза цилиндра BB_1 построена по профильной проекции ($B'''B_1'''$). Линия среза конуса – гипербола, ее вершина точка C построена по горизонтальной проекции C' . Точки A, B, B_1, C – характерные точки.

Для нахождения промежуточных точек линий среза кругового кольца и конуса использованы вспомогательные профильные плоскости β (β'') и γ (γ''). Плоскости β и γ пересекают тело вращения по окружностям радиусов R_2 и R_3 , которые на профильной проекции, пересекаясь с плоскостью α (α'''), дают промежуточные точки 1 и 2.

8.7. Вопросы для контроля

1. Какие линии получаются при пересечении цилиндра плоскостью?
2. Какие линии получаются при пересечении конуса плоскостью?
3. Какая линия получается при пересечении сферы плоскостью и какими могут быть проекции этой линии?
4. Как должны быть расположены плоскости, рассекающие тор по окружностям?
5. Какие поверхности вращения являются развертывающимися?